

矢量推力台架各向同性及灵敏度分析

吴 锋^{1,2}, 袁占斌³, 张 有², 王俊刚³

(1. 西北工业大学 动力与能源学院, 西安 710072;

2. 中国航空发动机集团有限公司 四川燃气涡轮研究院

高空模拟技术重点实验室, 四川 江油 621700;

3. 西北工业大学 数学与统计学院, 西安 710072)

摘 要: 为了对矢量推力台架进行结构参数设计与优化,进行了台架的各向同性和灵敏度分析。考虑到各向同性和对称性密切相关,提出了矢量推力台架中测力单元对称分布定义,并推导了对称分布下,测力单元坐标满足的特征方程。基于 1 阶静力影响系数矩阵的条件数这一指标对测力单元对称分布的六分力台架进行了各向同性分析,发现对称六分力台架 2:2:2 构型可具有完全各向同性,而 3:2:1 构型只能具有力矩各向同性;并经过优化分布半径和方位角得到理想 2:2:2 构型需满足 $r_x=r_y=r_z$ 和 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)=(0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$ 或 $(90^\circ, 180^\circ, 270^\circ)$, 理想 3:2:1 构型需满足 $r_x=\sqrt{3}r_z/2$ 和 $\theta_x=0^\circ$ 。研究了两种实际台架和两种理想台架的联系和区别,并通过对实际台架进行各向同性和灵敏度分析,发现台架具有力或者力矩各向同性会导致力或者力矩灵敏度也具有各向同性;力和力矩灵敏度都与相关联的测力单元的弹性杆柔度成正比,力矩灵敏度与相关联的测力单元分布半径成反比。该研究方法和结论对设计与建造推力矢量发动机测力台架具有一定的理论与方法方面的指导意义。

关 键 词: 六分力台架; 矢量推力; 各向同性; 对称分布; 灵敏度分析

中图分类号: V263.47; TP212.12

文献标志码: A

Analysis on isotropy and sensitivity of vector thrust stand

WU Feng^{1,2}, YUAN Zhanbin³, ZHANG You², WANG Jungang³

(1. School of Power and Energy,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Science and Technology on Altitude Simulation Laboratory,

Sichuan Gas Turbine Establishment,

Aero Engine Corporation of China, Jiangyou Sichuan 621700, China;

3. School of Mathematics and Statistics,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The isotropy and sensitivity analysis was conducted to design and optimize the structure of vector thrust stand. Given the closely interlinked isotropy and symmetry, symmetric distribution of load cells was denoted, and the associated characteristic equations about their coordinates were proved. By condition number based on spectral norm of first or-

收稿日期: 2019-12-19

基金项目: 陕西自然科学基金(2020JM-153); 重点实验室基金(N2018KE0080)

作者简介: 吴锋(1982—),男,研究员,博士生,研究领域为航空发动机高空模拟试验测试技术。

通信作者: 袁占斌(1981—),男,副教授,博士,研究领域为科学与工程计算。E-mail: yzzzb@nwpu.edu.cn

引用格式: 吴锋,袁占斌,张有,等. 矢量推力台架各向同性及灵敏度分析[J]. 航空动力学报, 2020, 35(7): 1353-1360. WU Feng, YUAN Zhanbin, ZHANG You, et al. Analysis on isotropy and sensitivity of vector thrust stand[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(7): 1353-1360.

der static coefficient matrix, the isotropy features of six-component stand were analyzed in detail. It was proved that 2 : 2 : 2 configuration can realize perfect isotropy and 3 : 2 : 1 configuration can only realize isotropy of torque. After optimizing radius and angles, the ideal configurations were obtained for each case respectively. The ideal 2 : 2 : 2 configuration was $r_x=r_y=r_z$ with $(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = (0, 90^\circ, 180^\circ)$ or $(90^\circ, 180^\circ, 270^\circ)$ and ideal 3 : 2 : 1 configuration was $r_x=\sqrt{3}r_z/2$ with $\theta_x=0^\circ$. Comparing the difference between real and ideal configurations and studying associated sensitivity, it was found that the isotropy of force or torque led to the isotropy of corresponding sensitivity. The force and torque sensitivity were proportional to the flexibility of the elastic rod, while the torque sensitivity was inversely proportional to the distribution radius of the related cells. Above methods and conclusions are instrumental in design and construction of vector thrust stand.

Key words: six-component thrust stand; vector thrust; isotropy; symmetric distribution; sensitivity analysis

由于六分力测力系统能同时测量任意外力的 3 个分力和 3 个力矩,因此被广泛应用于航空、航天、车辆工程、机器人等领域,大到航空发动机矢量推力台架,中到风洞试验中的六分力天平,小到微型机器人手指关节处的测力传感器。该类系统一般由运动部分(包括平移和转动)、固定部分和 6 个弹性测力单元组成,每个测力单元上安装了拉/压力传感器。6 个测力单元被并行放置在运动部分和固定部分之间,通过挠性件或球铰等相互连接。

航空发动机矢量推力台架以六分力台架为主要代表,是一种常规意义上六维力传感器各分量解耦测量范畴,主要用来测量航空矢量发动机尾喷管偏转产生的矢量推力。如美国阿诺德工程发展中心 C-1/C-2 试验舱^[1]和格林研究中心推进系统实验室(PSL)的 PSL-3/PSL-4 试验舱^[2]的六分力台架。与常用的 Stewart 结构^[3]相比,六分力台架的动架是长方体框架而不是圆盘,从而易于在 6 个表面上分布相互正交的测力单元来实现力及力矩之间的相互解耦。图 1 所示为实际应用的两种六分力台架,其构型为 2 : 2 : 2 型(1/2, 3/4,5/6)和 3 : 2 : 1 型(5/4'/6',1/2,3)。这里前面型号数字表示在长方体动架的 3 组相对表面上放置的测力单元个数^[4],括号内数字表示图 1 中所示测力单元标号。

在众多刻画六分力台架的性能指标中,各向同性和灵敏度^[5]是反映台架性能优劣的两个重要指标:当六分力台架具有各向同性时,整个结构有最佳的力和运动传递性能,各个测力单元负载均衡,因此能获得更大的量程和更高的精度。当台

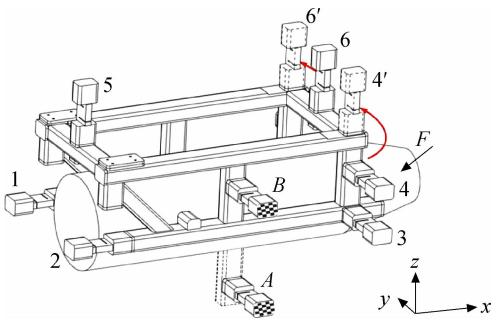


图 1 动架和 6 个测力单元分布图
Fig.1 Floating frame and six cells distribution

架灵敏度越高时,对矢量推力微小变化的识别能力就越高。

关于六分力台架各向同性和灵敏度方面研究工作较少,很多已有研究集中在 Stewart 结构方面。在各向同性定义方面,Uchiyama 等^[6]将 Jacobi 矩阵的条件数作为衡量各向同性的指标,认为条件数为 1 的构型满足各向同性。考虑到力和力矩的量纲不同,熊有伦^[7]将各向同性分为力各向同性和力矩各向同性。赵永生、姚建涛等^[8-9]结合奇异值定义了各向同性度的概念,综合考虑逆映射矩阵的性质。

在 Stewart 结构的各向同性性能优化方面,主要有理论分析和数值优化两类方法。理论分析方面,王洪瑞等^[10-11]论证了 Stewart 六分力传感器的各向同性只和上下平台半径,分支单元长度和方位角之差有关。赵克定等^[12]解析推导了 Jacobi 矩阵,求出了各奇异值并用矩阵谱范数的形式构造了各向同性的解析形式。数值优化方面,赵延治等^[13]以加权各向同性度为目标并用 Mat-

lab 优化工具数值求解。Tao 等^[14]采用有限元方法对传感器各向同性性能进行优化。由于理论分析时参数太多且相互关联,导致需求解的非线性方程组过于繁杂,而数值优化方面缺少计算效率高、稳定的优化算法,这些都严重制约了并联机构的优化设计进程。

大部分能直接进行理论分析的六分力传感器都满足一定对称性,基于这些对称性就可以用较少几何参数^[11-12]或者复合单叶双曲面^[15-16]来定义、分析各向同性。本文首先提出了六分力台架上测力单元对称性分布定义以及其坐标应满足的特征方程,然后基于这些特征方程,解析推导出 Jacobi 矩阵所有特征值,从而可直接进行台架各向同性和灵敏度性能分析和优化设计。

1 六分力台架的各向同性

根据螺旋理论^[17],动架和 6 个测力单元组成的六分力台架满足静力学平衡方程

$$\sum_{i=1}^6 f_i \mathbf{X}_i = \mathbf{F} + \mathbf{M} \quad (1)$$

写成矩阵形式 $\mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{F}_w$ 为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 & \mathbf{S}_5 & \mathbf{S}_6 \\ \mathbf{S}_{01} & \mathbf{S}_{02} & \mathbf{S}_{03} & \mathbf{S}_{04} & \mathbf{S}_{05} & \mathbf{S}_{06} \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$, $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ 为作用在动架上的矢量推力 $\mathbf{F}_w$ 的 3 个分力和 3 个力矩, $\mathbf{f}^T = (f_1, f_2, \dots, f_6)$ 为 6 个测力单元上的反力组成的矢量; $(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_{0i})$ 表示第 i 个测力单元的 Plücker 坐标,其中 $\mathbf{S}_i$ 表示该测力单元的单位方向向量, $\mathbf{S}_{0i} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{S}_i$ 表示动架与测力单元连接点处位置向量 $\mathbf{r}_0$ 与 $\mathbf{S}_i$ 的叉积。方程组(2)的前 3 行表示力的平衡,后 3 行表示力矩的平衡。矩阵 $\mathbf{G}$ 被称为 1 阶静力影响系数矩阵(Jacobi 矩阵),矩阵 $\mathbf{G}$ 的性质决定了测力台架的各种性能,如奇异性、各向同性、灵敏度等。

矩阵 $\mathbf{G}$ 的条件数 $\text{cond}(\mathbf{G})$ 被用来衡量六分力台架的各向同性性能,其定义为

$$\text{cond}(\mathbf{G}) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)}{\lambda_{\min}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)}} \quad (3)$$

这里 λ 表示矩阵 $\mathbf{K} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ 的特征值。

由于力和力矩量纲不同,直接用 $\text{cond}(\mathbf{G})$ 来衡量各向同性较为含混,因此将各向同性分为力各向同性和力矩各向同性并分别进行分析。

将 $\mathbf{G}$ 中与力相关的前 3 行子矩阵记为 $\mathbf{G}_F$,与力矩相关的后 3 行子矩阵记为 $\mathbf{G}_M$,则有

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_F\mathbf{G}_F^T & \mathbf{G}_F\mathbf{G}_M^T \\ \mathbf{G}_M\mathbf{G}_F^T & \mathbf{G}_M\mathbf{G}_M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(4)中如果子矩阵 $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^T = \mathbf{0}$,则表示各测力单元的力和力矩之间实现了完全解耦。根据矩阵理论^[18]:当 $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^T = \mathbf{0}$ 时,子矩阵 $\mathbf{K}_{11}$ 和 $\mathbf{K}_{22}$ 的特征值就是 $\mathbf{K}$ 的所有特征值。该结论意味着力各向同性和力矩各向同性可以通过子矩阵 $\mathbf{K}_{11}$ 和 $\mathbf{K}_{22}$ 的特征值来进行分析,即

$$\text{cond}(\mathbf{G}_F) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{11})}{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{11})}} \quad (5)$$

$$\text{cond}(\mathbf{G}_M) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{22})}{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{22})}} \quad (6)$$

如果 $\mathbf{K}_{11}$ 的 3 个特征值相同,则 $\text{cond}(\mathbf{G}_F) = 1$,测力台架满足力各向同性;如果 $\mathbf{K}_{22}$ 的 3 个特征值相同,则 $\text{cond}(\mathbf{G}_M) = 1$,测力台架满足力矩各向同性。如果 $\mathbf{K}_{11}$ 和 $\mathbf{K}_{22}$ 的 6 个特征值全部相等,该测力台架具有完全各向同性。

2 对称性和特征方程

在动架某个平面上(以图 2 中平行于 xOy 的面 $z=H_1$ 为例),在以局部坐标系原点为圆心和以 r_z 为半径的圆周上,均匀分布 n 个点 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$,这些点被称为一组对称点。特别地,当 $n=1$ 时,取为原点 O_z ,图 2 中 S1、S2、 $\dots$ 、S6 为传感器代号。

定理 1 如果 n 个点是对称点,则其坐标满足下面的特征方程:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0 \end{cases} \quad (7)$$

证明:当 $n=1$ 时, $(x_1, y_1) = (0, 0)$ 显然满足。

当 $n \geq 2$ 时,这些点的极坐标为

$$(x_i, y_i) = (r_z \cos \alpha_i, r_z \sin \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中角度 $\alpha_i = \theta_z + (i-1) \times \frac{2\pi}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。这里 θ_z 表示 x 轴正半轴与向量 (x_1, y_1) 围成的圆心角,也被称为方位角。

利用欧拉公式^[19] $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$,可知复数 $r_z e^{j\alpha_1} + r_z e^{j\alpha_2} + \dots + r_z e^{j\alpha_n}$ 的实部和虚部恰好是 $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ 和 $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ 。而

$$r_z e^{j\alpha_1} + r_z e^{j\alpha_2} + \dots + r_z e^{j\alpha_n} =$$

$$r_z \{ e^{j\theta_z} + e^{j(\theta_z + \frac{2\pi}{n})} + \dots + e^{j[\theta_z + (n-1) \times \frac{2\pi}{n}]} \} =$$

$$r_z e^{j\theta_z} [1 + e^{j\frac{2\pi}{n}} + e^{j2 \times \frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{j(n-1) \times \frac{2\pi}{n}}] =$$

$$r_z e^{j\theta_z} \{ [1 - (e^{j\frac{2\pi}{n}})^n] / (1 - e^{j\frac{2\pi}{n}}) \} = 0$$

上面最后一步用到了等比数列求和公式,这就证明了式(7)中两个特征方程成立。

证毕。

从物理上,特征方程(式(7))表明均质正多边形物体的重心位于外接圆的圆心。

式(7)是一组对称点所具有的最基本的性质,对于常用的 $n=3$ 情形,其坐标还满足其他等式,下面进行具体说明。

定理 2 如果 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^3$ 是一组对称点,则有

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 \tag{8}$$

证明:将左端转化为极坐标

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 &= \\ r_z^2(\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\cos\alpha_2 + \sin\alpha_3\cos\alpha_3) &= \\ \frac{r_z^2}{2}(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_3) \end{aligned}$$

式中 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\theta_z, \theta_z + 120^\circ, \theta_z + 240^\circ)$, 由此得 $(2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3) = (2\theta_z, 2\theta_z + 240^\circ, 2\theta_z + 120^\circ + 360^\circ)$ 表明 $2\alpha_1, 2\alpha_3, 2\alpha_2$ 相互之间的夹角也为 120° , 将按圆心角 $2\alpha_1, 2\alpha_3, 2\alpha_2$ 分布在半径为 $\frac{r_z^2}{2}$ 的圆周上的 3 个点记为 $\{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\}_{i=1}^3$, 由于这 3 个点是一组对称点, 根据式(7)中第 2 个式子得

$$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

证毕。

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -z_3 - z_4 & y_5 + y_6 \\ z_1 + z_2 & 0 & -x_5 - x_6 \\ -y_1 - y_2 & x_3 + x_4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} y_5^2 + y_6^2 + z_3^2 + z_4^2 & -x_5y_5 - x_6y_6 & -x_3z_3 - x_4z_4 \\ -x_5y_5 - x_6y_6 & x_5^2 + x_6^2 + z_1^2 + z_2^2 & -y_1z_1 - y_2z_2 \\ -x_3z_3 - x_4z_4 & -y_1z_1 - y_2z_2 & x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2 \end{bmatrix}$$

坐标轴与 3 个面 $x=L_1, y=W_1, z=H_1$ 的交点分别为 O_x, O_y, O_z , 在各个面上分别将两个测力单元对称分布在以 O_x, O_y, O_z 为圆心以 r_x, r_y, r_z

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 2(r_z^2\sin^2\theta_z + r_y^2\sin^2\theta_y) & -r_z^2\sin 2\theta_z & -r_y^2\sin 2\theta_y \\ -r_z^2\sin 2\theta_z & 2(r_z^2\cos^2\theta_z + r_x^2\sin^2\theta_x) & -r_x^2\sin 2\theta_x \\ -r_y^2\sin 2\theta_y & -r_x^2\sin 2\theta_x & 2(r_y^2\cos^2\theta_y + r_x^2\cos^2\theta_x) \end{bmatrix}$$

上述矩阵中参数 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 分别表示 3 个面上各组测力单元的方位角。为了进一步简化求解, 假设 $r_x=r_y=r_z=r$ 。通过搜索求解, 得到当 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = (0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$ 或 $(90^\circ, 180^\circ, 270^\circ)$ 时, 矩阵 $\mathbf{K}_{22}$ 的 3 个特征值都等于 $2r^2$ 。特别地取 $r=1$, 可知 $\mathbf{K}$ 的 6 个特征值全部等于 2, 该六分力台架

在平面 $x=L_1, y=W_1$ 可以得到与式(7)和式(8)类似的特征方程。

3 六分力台架各向同性分析

3.1 完全各向同性的 2 : 2 : 2 构型

以图 2 所示 2 : 2 : 2 构型六分力台架为例, 其具体构型为: 在动架平面 $x=L_1$ 上点 (L_1, y_1, z_1) 和 (L_1, y_2, z_2) 处布置两个方向沿着 $\mathbf{e}_1=(1, 0, 0)$ 的测力单元; 在平面 $y=W_1$ 上两点 (x_3, W_1, z_3) 和 (x_4, W_1, z_4) 处布置平行于 $\mathbf{e}_2=(0, 1, 0)$ 的测力单元; 在平面 $z=H_1$ 上两点 (x_5, y_5, H_1) 和 (x_6, y_6, H_1) 处布置平行于 $\mathbf{e}_3=(0, 0, 1)$ 的两个测力单元。

根据式(2)得到 1 阶静力影响矩阵 $\mathbf{G}$ 为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -z_3 & -z_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & 0 & 0 & -x_5 & -x_6 \\ -y_1 & -y_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

进一步得到 $\mathbf{K}=\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ 为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & \mathbf{K}_{21}^T \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中

为半径的圆周上。根据特征方程式(7), 可知 $\mathbf{K}_{21}=\mathbf{K}_{12}^T=\mathbf{0}_{3\times 3}$, 因此 $\mathbf{K}$ 退化为一个块对角矩阵。将 $\mathbf{K}_{22}$ 用极坐标表示为

满足完全各向同性, 两种满足完全各向同性的构型如图 2 所示。

3.2 力矩各向同性的 3 : 2 : 1 构型

将 6 个测力单元按照 3 : 2 : 1 的数量放置在动架表面 $z=H_1, x=L_1$ 和 $y=W_1$ 上, 在这种情形下, 1 阶静力影响系数矩阵为 $\mathbf{G}$ 为

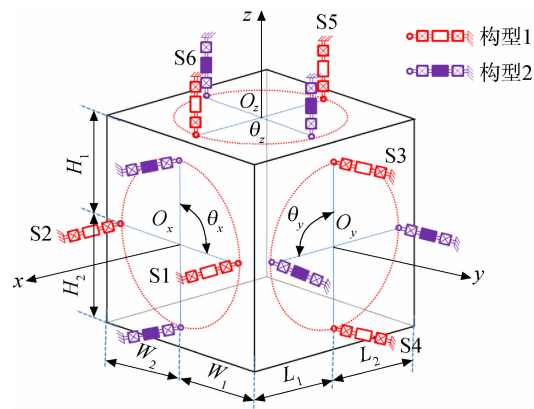


图 2 两种完全各向同性的 2 : 2 : 2 构型

Fig. 2 Two completely isotropic 2 : 2 : 2 configurations

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -z_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & 0 & -x_4 & -x_5 & -x_6 \\ -y_1 & -y_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 $K=GG^T$ 与矩阵(9)结构相似,其中

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -z_3 & y_4 + y_5 + y_6 \\ z_1 + z_2 & 0 & -x_4 - x_5 - x_6 \\ -y_1 - y_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + z_3^2 & -x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 & -x_3 z_3 \\ -x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 & x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + z_1^2 + z_2^2 & -y_1 z_1 - y_2 z_2 \\ -x_3 z_3 & -y_1 z_1 - y_2 z_2 & x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 \end{bmatrix}$$

在每个面上都将测力单元沿着 O_x, O_y, O_z 对称分布,则根据特征方程(式(7)),子矩阵 $K_{21} = K_{12}^T = \mathbf{0}_{3 \times 3}$,因此 K 退化为一个块对角矩阵。由于 K_{11} 的 3 个特征值分别是 2、1、3,因此对称的 3 : 2 : 1 构型无论如何改变参数都无法获得力的各向同性。如果选择合适的参数使得 K_{22} 的 3 个

特征值相等,这种构型依然可以满足力矩各向同性。根据式(8)可知 K_{22} 中 $-x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 = 0$,另外在面 $y=W_1$ 上,由于只有一个测力单元,对称性分布要求 $x_3=z_3=0$ 。

这样 K_{22} 进一步简化为

$$K_{22} = \begin{bmatrix} y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + z_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + z_1^2 + z_2^2 & -y_1 z_1 - y_2 z_2 \\ 0 & -y_1 z_1 - y_2 z_2 & x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 \end{bmatrix}$$

将 K_{22} 用极坐标表示为

$$K_{22} = \begin{bmatrix} 3r_z^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r_x^2/2 + 2r_x^2 \sin^2 \theta_x & -r_x^2 \sin 2\theta_x \\ 0 & -r_x^2 \sin 2\theta_x & 2r_x^2 \cos^2 \theta_x \end{bmatrix}$$

通过搜索求解,得到 $\theta_x=0^\circ, r_x=\sqrt{3}r_z/2$ 时, K_{22} 的 3 个特征值全部等于 $3r_z^2/2$ 或者 $2r_x^2$,从而实现了理想 3 : 2 : 1 构型的力矩各向同性,其具体构型如图 3 所示。

满足各向同性的理想 2 : 2 : 2 和 3 : 2 : 1 台架实现了 3 个分力和 3 个力矩完全解耦,这样从转换中心(坐标系原点)施加力或力矩时,只在对应方向产生微小平动或转动。各组测力单元的功能明确且任务分配均衡,有利于获得一致的测量精度。

3.3 实际台架的各向同性分析

由于航空发动机的几何特征和推力特性,前述的两种理想台架无法直接应用到工程实际中,需要对动架的结构和测力单元的分布进行一定的调整。

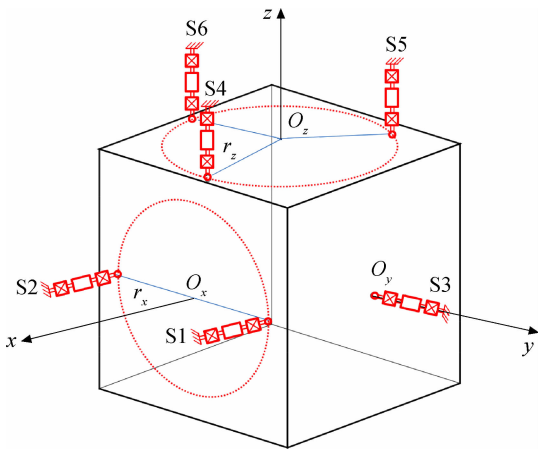


图 3 力矩各向同性的 3 : 2 : 1 构型

Fig. 3 Torque isotropic 3 : 2 : 1 configuration

航空发动机的长径比较大(以 4 : 1 为例说明),故动架框架往往是长方体而不是正方体。另外发动机产生的推力主要沿轴向方向^[20],分力 F_y, F_z 大小不超过 F_w 大小的一半(喷管偏转角小于 30°)。飞行过程中, F_w 产生的力矩以俯仰力

矩 M_y 为主,滚转力矩 M_x 和其他两种力矩相比很小。这些比例和大小关系在进行台架各向同性设计时应予以考虑。

以 2 : 2 : 2 构型为例:由于台架的各向同性是针对转换中心而言的^[7],因此首先需要确定转换中心。根据发动机结构对称性,转换中心应位于发动机的轴线上,其 x 坐标取为如图 1 所示中间立柱处 x 坐标。

将测力单元 3 和 4 向左平移到中间立柱,并以半径 r_y 对称分布在 A 和 B 处。这就是图 2 中所示的理想构型 1,惟一不同的是 $r_z = 2r_x = 2r_y$ 。由于 $\mathbf{K}_{11}$ 的 3 个特征值都为 2,故该结构满足力各向同性。但考虑到轴向推力 F_x 较大,实际中应选用更大量程的测力单元 1 和 2 来承受该力。由于矩阵 $\mathbf{K}_{22}$ 的特征值分别 $2r_y^2, 2r_z^2, 2r_x^2$,故结构满足力矩的正交各向异性。由于与俯仰力矩有关的特征值 $2r_z^2$ 是其他两个特征值的 4 倍,因此该结构可以承受更大的俯仰力矩。

为了方便发动机的装卸,动架常被设计成一种半包围结构,这种结构导致无法在 A 处安装测力单元。另外,为了减少动架结构在分力 F_y 下的变形量,需要将 A 和 B 处的测力单元分别移动到 3 和 4 处。

虽然各向同性对旋转具有不变性,但对于平移不具有不变性^[7]。这种移动会导致整个结构的各向同性发生改变,具体地, $\mathbf{K}_{11}$ 的特征值不变, $\mathbf{K}_{22}$ 的特征值变化情况为:由于测力单元 3、4 向右平移导致力矩耦合,故和偏转力矩相关的第 3 个特征值增加为 $(11 + \sqrt{97})r_x^2/2$ 。同时 3、4 之间距离减半导致与滚转力矩相关的第 1 个特征值减小为 $(11 - \sqrt{97})r_z^2/2$ 。考虑到发动机推力产生的滚转力矩很小,这种平移对力矩测量带来影响十分有限。

对于理想 3 : 2 : 1 构型,设平面上均匀分布在半径为 r_z 的圆上 3 个测力单元坐标分别为 $(-r_z, 0), (r_z/2, \sqrt{3}r_z/2)$ 和 $(r_z/2, -\sqrt{3}r_z/2)$ 。从文中第 3.2 节中约束 $r_x = \sqrt{3}r_z/2$ 可知后两个点的位置也为 $(r_z/2, r_x)$ 和 $(r_z/2, -r_x)$ 。图 1 中的实际 3 : 2 : 1 构型中的 5, 4', 6' 测力单元的坐标为 $(-r_z, 0), (r_z, r_x), (r_z, -r_x)$,相当于把理想构型的后两个测力单元向尾部平移 $r_z/2$ 。这种构型改变导致 $\mathbf{K}_{11}$ 的特征值不变, $\mathbf{K}_{22}$ 的特征值变化为 $2r_x^2, 3r_z^2, 6r_x^2$ 。这种变化虽然破坏了力矩各向同性,但使得俯仰力矩相关的特征值从 $3r_z^2/2$ 增

加到 $3r_z^2$ 。另外,3 号测力单元从中间立柱平移到右端立柱,使得与偏转力矩 M_z 相关的特征值从 $2r_x^2$ 增加到 $2r_x^2 + r_z^2 = 6r_x^2$ 。3 个力矩的特征值大小顺序和实际推力产生的真实力矩的大小顺序刚好符合。

实际台架由于装配误差及受力后台架的结构发生变形,会导致测力单元和动架相对位置发生微小的位置移动和角度偏斜。这些微变形导致台架最初设计的解耦特性被破坏,各向同性特性也随之改变。因此,在使用一段时间后,需要对台架加载校准力进行校准,以提高测量精度及评估各向同性的变化情况。

4 六分力台架灵敏度分析

灵敏度也是六分力台架结构设计中需要考虑的重要指标。不同于普通推力台架只需要考虑发动机轴向的灵敏度,六分力矢量推力台架需要考 6 个测力单元的综合灵敏度。

影响台架灵敏度的因素可分为测力单元自身因素和台架的结构因素,前者包括弹性杆的刚度,应变片粘贴位置及力敏元件中电桥的灵敏度,后者主要指动架结构和动架上测力单元的分布,这里仅考虑弹性杆的刚度和结构因素对灵敏度的影响。

根据静力学平衡方程 $\mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{F}_w$, 可得到
$$\mathbf{f} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}_w = \mathbf{C}\mathbf{F}_w \tag{10}$$

式中 $\mathbf{C} = \mathbf{G}^{-1}$ 。根据胡克定律,第 i 个测力单元的弹性杆上轴向反力和应变片粘贴处的轴向变形成正比,即 $f_i = k_i \Delta l_i, k_i$ 是第 i 个弹性杆刚度参数,记 6 个测力单元上的弹性杆的刚度组成的向量为 $\mathbf{k}^T = (k_1, k_2, \dots, k_6)$ 。

记 $\mathbf{L}^T = (l_1, l_2, \dots, l_6)$ 为 6 个测力单元上的轴向变形组成的向量,则由式(10)得

$$\mathbf{k} * \mathbf{L} = \mathbf{C}\mathbf{F}_w \tag{11}$$

这里 * 表示向量的 Hadamard 积。

对于推力发动机台架,其灵敏度定义为弹性杆轴向变形和轴向推力之比 $\mathbf{L}_x/\mathbf{F}_x$,即单位轴向力作用下产生的轴向变形。

对于六分力台架,在单位力作用下,6 个测力单元都可能产生变形,故需要用 $\mathbf{L}$ 的范数来刻画灵敏度。工程中用加载 3 个单位力 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 和 3 个单位力矩 $\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6$,然后计算 $\|\mathbf{L}\|_2$ 的方法得到 3 个力灵敏度 $S_{F_x}, S_{F_y}, S_{F_z}$ 和 3 个力矩灵敏度 $S_{M_x}, S_{M_y}, S_{M_z}$ 。

以 S_{F_x} 为例,加载 $\mathbf{F}_w = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$,

根据(10)式得

$$k * L = C e_1 = C_1 \tag{12}$$

式中 C_1 表示矩阵 C 的第 1 列,由上式解出 $L = k^{-1} * C_1 = w * C_1, w^T = (w_1, w_2, \cdots, w_6)$ 是 6 个测力单元的柔度参数 $w_i = 1/k_i$ 组成的向量。进一步得 $S_{F_x} = \|L\|_2 = \sqrt{(w * C_1, w * C_1)}$,同理得到其他灵敏度并全部列出

$$\begin{cases} S_{F_x} = \sqrt{(w * C_1, w * C_1)} \\ S_{F_y} = \sqrt{(w * C_2, w * C_2)} \\ S_{F_z} = \sqrt{(w * C_3, w * C_3)} \\ S_{M_x} = \sqrt{(w * C_4, w * C_4)} \\ S_{M_y} = \sqrt{(w * C_5, w * C_5)} \\ S_{M_z} = \sqrt{(w * C_6, w * C_6)} \end{cases}$$

计算得到理想 2 : 2 : 2 构型的灵敏度分别为

$$\begin{cases} S_{F_x} = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}/2 \\ S_{F_y} = \sqrt{w_3^2 + w_4^2}/2 \\ S_{F_z} = \sqrt{w_5^2 + w_6^2}/2 \\ S_{M_x} = \sqrt{w_3^2 + w_4^2}/(2r_y) \\ S_{M_y} = \sqrt{w_5^2 + w_6^2}/(2r_z) \\ S_{M_z} = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}/(2r_x) \end{cases}$$

计算得到理想 3 : 2 : 1 构型的灵敏度分别为

$$\begin{cases} S_{F_x} = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}/2 \\ S_{F_y} = w_3 \\ S_{F_z} = \sqrt{w_4^3 + w_5^2 + w_6^2}/3 \\ S_{M_x} = \sqrt{w_4^2 + w_6^2}/(\sqrt{3}r_z) \\ S_{M_y} = \sqrt{w_4^2 + 4w_5^2 + w_6^2}/(3r_z) \\ S_{M_z} = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}/(2r_x) \end{cases}$$

可见力和力矩灵敏度都与相关联的弹性杆柔度成正比,且力矩灵敏度与相关联的测力单元对称分布的半径成反比。如果力或者力矩具有各向同性,则相应力或者力矩灵敏度也具有各向同性。灵敏度各向同性实现了各个测量单元对转换中心施加的力或者力矩具有相同的变形响应,从而利于捕捉各个方向力或力矩细微变化。

通过对图 1 中的实际 2 : 2 : 2 台架的灵敏度计算发现,和理想 2 : 2 : 2 台架的灵敏度相比,只有 $S_{F_y} = \sqrt{(w_1^2 + w_2^2)r_z^2 + 4w_3^2r_x^2}/2r_x, S_{M_x} = \sqrt{w_3^2 + w_4^2}/r_y$ 和原来不同,这种改变的是由单元 3 和 4 的移位引起的。另外,如果增加测量轴向

推力的单元 1 和 2 的量程,则随着柔度 w_1, w_2 的降低, $S_{F_x}, S_{F_y}, S_{M_z}$ 都会降低。如果增加测量俯仰力矩的单元 5 和 6 之间的分布半径 r_z ,则 S_{M_y} 会明显减小。

对比实际和理想 3 : 2 : 1 台架的灵敏度发现,由于 $4', 6'$ 后移导致 S_{F_z} 减小为 $\sqrt{w_4^3 + 2w_5^2 + w_6^2}/4$ 及力矩灵敏度 S_{M_y} 减小为 $\sqrt{w_4^2 + 4w_5^2 + w_6^2}/(4r_z)$ 。另外,由于 3 移动到右侧立柱导致力 F_y 和力矩 M_z 出现耦合,使得 S_{F_y} 增加为 $w_3 + \sqrt{(w_1^2 + w_2^2)r_z^2}/(2r_x)$ 。其他的 3 个灵敏度保持不变。

5 结 论

基于螺旋理论和特征方程,解析推导了对称六分力台架的 1 阶静力影响系数矩阵 G 及 $K = GG^T$ 。研究了六分力台架各向同性和灵敏度及它们与结构参数的关系,得到下述结论:

- 1) 各个方向测力单元对称分布有利于实现力和力矩之间完全解耦,有利于得到矩阵 GG^T 的特征值显示表达式,从而方便分析结构各向同性和灵敏度。
- 2) 理想 2 : 2 : 2 构型的六分力台架可实现完全各向同性。构型参数中半径应满足 $r_x = r_y = r_z$,角度 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = (0, 90^\circ, 180^\circ)$ 或 $(90^\circ, 180^\circ, 270^\circ)$;理想 3 : 2 : 1 构型的六分力台架只能实现力矩各向同性,构型参数应满足 $r_x = \sqrt{3}r_z/2, \theta_x = 0^\circ$ 。
- 3) 当六分力台架满足力或力矩各向同性时,其对应力灵敏度或者力矩灵敏度也满足各向同性。
- 4) 理想台架可作为实际台架设计的基础,在设计实际台架时,需要根据发动机的几何特征,矢量推力的力和力矩特性,对理想台架 3 个方向上的测力单元刚度、分布半径、和空间位置进行合理调整,以实现台架刚度、各向同性和灵敏度的综合协调最优。

上述研究方法和结果对设计与建设国内急需发展的推力矢量发动机测力台架具有一定的理论与方法方面的指导意义,有助于建立基于并联结构的推力矢量台架性能分析与优化设计的理论基础。

参考文献:

[1] RUNYAN R B, RYND J P, SEELY J F. Thrust stand design principles [R]. Nashville, Tennessee, USA: AIAA 17th Aerospace Ground Testing Conference, 1992.
[2] CASTNER R, GOODNIGHT T. Improvements to the pro-

- pulsion systems lab Glenn research center[R]. Reno, Nevada, USA: AIAA 43rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2005.
- [3] 赵现朝. Stewart 结构六维力传感器设计理论与应用研究[D]. 河北 秦皇岛:燕山大学, 2002.
ZHAO Xianchao. Design theory and application of the 6-axis F/T sensors based on steward platform structure[D]. Qinghuangdao, Hebei: Yanshan University, 2002. (in Chinese)
- [4] 张有, 张斌山, 吴峰, 等. 六分力台架设计与矢量推力定位[J]. 航空动力学报, 2019, 34(11): 2324-2330.
ZHANG You, ZHANG Binshan, WU Feng, et al. Six-component stand design and vector thrust positioning[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(11): 2324-2330. (in Chinese)
- [5] KANEKO M. Twin-head six-axis force sensors[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1996, 12(1): 146-154.
- [6] UCHIYAMA M, HAKOMORI K A. Few considerations on structure design of force sensors[R]. Osaka, Japan: The 3rd Annual Conference, 1985.
- [7] 熊有伦. 机器人力传感器的各向同性[J]. 自动化学报, 1996, 22(1): 10-18.
XIONG Youlun. On isotropy of robot's force sensors[J]. Acta Automatica Sinica, 1996, 22(1): 10-18. (in Chinese)
- [8] 赵永生, 姚建涛, 侯雨雷, 等. 并联结构六维力传感器[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.
- [9] 姚建涛, 侯雨雷, 毛海峡, 等. Stewart 结构六维力传感器各向同性的解析分析与优化设计[J]. 机械工程学报, 2009, 45(12): 22-28.
YAO Jiantao, HOU Yulei, MAO Haixia, et al. Analytic analysis and optimal design of isotropy performance of six dimensional force sensor based on Stewart platform[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(12): 22-28. (in Chinese)
- [10] WANG Hongrui, GAO Feng, HUANG Zhen. Design of 6-axis force/torque sensor based on Stewart platform related to isotropy[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1998, 11(3): 217-222.
- [11] 王洪瑞, 陈贵林, 高峰, 等. 基于 Stewart 平台的 6 维力传感器各向同性的进一步分析[J]. 机械工程学报, 2000, 36(4): 49-52.
WANG Hongrui, CHEN Guilin, GAO Feng, et al. Analyze of 6-axis force/torque sensor based on steward platform related to isotropy[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(4): 49-52. (in Chinese)
- [12] 赵克定, 杨灏泉, 吴盛林, 等. 基于 Stewart 平台的六维力/力矩传感器各向同性的解析研究[J]. 航空学报, 2002, 23(3): 241-244.
ZHAO Keding, YANG Haoquan, WU Shenglin, et al. Analysis of isotropy for the six-axis force/torque sensor based on steward platform[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2002, 23(3): 241-244. (in Chinese)
- [13] 赵延治, 赵铁石, 温锐, 等. 并联结构六维力传感器性能分析与优化设计[J]. 中国机械工程, 2006, 17(增刊): 299-302.
ZHAO Yanzhi, ZHAO Tieshi, WEN Rui, et al. Performance analysis and optimal design of axis force sensor[J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17 (Suppl.): 299-302. (in Chinese)
- [14] TAO L, YOSHI I, KYOKO S. A six dimensional parallel force sensor for human dynamics analysis[R]. Singapore: The 2004 IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, 2004.
- [15] 佟志忠, 姜洪洲, 何景峰, 等. 基于单叶双曲面的标准 Stewart 结构六维力传感器各向同性优化设计[J]. 航空学报, 2011, 32(12): 2327-2334.
TONG Zhizhong, JIANG Hongzhou, HE Jingfeng, et al. Optimal design of isotropy performance of six-dimensional force sensor based on standard Stewart platform lying on a circular hyperboloid of one sheet[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(12): 2327-2334. (in Chinese)
- [16] 佟志忠, 姜洪洲, 何景峰, 等. 基于复合单叶双曲面的广义 Gough-Stewart 结构六维力传感器各向同性优化设计[J]. 航空学报, 2013, 34(11): 2607-2615.
TONG Zhizhong, JIANG Hongkai, HE Jingfeng, et al. Optimal design of isotropy performance of a six dimensional force sensor based on a generalized Gough-Stewart structure lying on a pair of circular hyperboloids[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(11): 2607-2615. (in Chinese)
- [17] 黄真. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [18] GOLUB G H, VAN LOAN C F. Matrix computations[M]. Baltimore, Maryland, USA: the Johns Hopkins University Press, 2012.
- [19] BROWN J W, CHUCHILL R V. Complex variables and applications[M]. London: McGraw-Hill Education, 2013.
- [20] 汤伟, 刘李涛, 陈洪, 等. 矢量喷管推力特性的风洞试验技术[J]. 航空动力学报, 2018, 33(4): 858-864.
TANG Wei, LIU Litao, CHEN Hong, et al. Thrust characteristic test technique of vectoring nozzle in wind tunnel[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(4): 858-864. (in Chinese)

(编辑: 叶 青、王碧琚)